



## Moments d'exposition des connaissances à l'université : le cas de la notion de limite

Nicolas Grenier-Boley, Stéphanie Bridoux, Christophe Hache

### ► To cite this version:

Nicolas Grenier-Boley, Stéphanie Bridoux, Christophe Hache. Moments d'exposition des connaissances à l'université : le cas de la notion de limite. First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, Mar 2016, Montpellier, France. <hal-01337896>

**HAL Id: hal-01337896**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337896>**

Submitted on 27 Jun 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Moments d'exposition des connaissances à l'université : le cas de la notion de limite

Nicolas Grenier-Boley<sup>1</sup>, Stéphanie Bridoux<sup>2</sup> et Christophe Hache<sup>3</sup>

<sup>123</sup>LDAR, EA 4434 ; <sup>1</sup>Université de Rouen, France, [Nicolas.Grenier-Boley@univ-rouen.fr](mailto:Nicolas.Grenier-Boley@univ-rouen.fr) ; <sup>2</sup>Université de Mons, Belgique, [stephanie.bridoux@umons.ac.be](mailto:stephanie.bridoux@umons.ac.be) ;

<sup>3</sup>Université Paris Diderot, France, [christophe.hache@univ-paris-diderot.fr](mailto:christophe.hache@univ-paris-diderot.fr)

*Dans cette contribution, nous abordons la question générale de l'utilité pour les étudiants des cours magistraux à l'université. Pour cela, nous comparons deux types de cours de première année d'université scientifique consacrés à la première rencontre des étudiants avec la définition formelle de limite de suite ou de fonction : le cours d'un manuel et un cours en amphi [1] filmé. Pour chaque type de cours, nous caractérisons en termes de proximités-en-acte discursives (Robert & Vandebrouck, 2014) les tentatives de rapprochement de l'enseignant entre nouvelles et anciennes connaissances des étudiants. Il semble que le cours en amphi soit plus à même de donner des occasions possibles de développer des liens avec les connaissances anciennes des étudiants et d'éclairer ce qui est nouveau, notamment certains éléments logiques de ces définitions, favorisant ainsi des rapprochements propices aux apprentissages.*

*Mots-clefs: cours magistral, limite d'une suite, limite d'une fonction, proximité-en-acte, formalisme.*

## INTRODUCTION

Nous abordons dans ce texte la question de savoir à quoi peut servir le cours magistral donné dans l'enseignement supérieur, pour les étudiants. Par « cours », nous entendons un moment où l'enseignant expose à l'écrit ou à l'oral des connaissances (savoirs) [2] aux étudiants. Ce questionnement s'intègre dans une recherche plus globale qui se donne comme objectif d'apprécier ce que peut apporter l'exposition des connaissances aux élèves ou aux étudiants au lycée et à l'université (Bridoux et al., 2015). Ces moments de cours ne sont pas ceux durant lesquels les élèves sont les plus actifs. Ils le sont peut-être encore moins dans le supérieur où il y a en général peu d'interaction entre les étudiants et le professeur. Dans l'enseignement supérieur, les étudiants ont également à leur disposition de nombreuses ressources qui leur donnent directement accès au texte du savoir, comme des livres, des photocopiés, des vidéos de cours en ligne... et ceci justifie encore plus le questionnement. L'objectif de ce texte est de mettre en regard un cours issu d'un manuel et un cours filmé donné à l'université, en France, de manière à mieux comprendre certaines spécificités du cours « classique » et son impact possible sur les apprentissages des étudiants.

Nous avons ciblé la notion de limite (suite et fonction) qui est une notion clé de l'enseignement de l'Analyse dans la première année du supérieur. Cette notion, qui est également enseignée dans de nombreux pays en première année d'université, est

aussi source de nombreuses difficultés chez les élèves et les étudiants : on en trouvera une synthèse assez complète dans l'article d'Oktaç et Vivier (à paraître). Dans la suite, et sauf mention contraire, nous entendrons par « notion de limite » de suite ou de fonction la « notion mathématisée formelle quantifiée de limite » (en epsilon-N pour les suites et en epsilon-alpha pour les fonctions).

## **PROBLEMATIQUE**

La notion de limite (de suite, de fonction) est une notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice (notion « FUG », Robert, 1998), c'est-à-dire portée par un formalisme nouveau et complexe, généralisateur, unifiant des connaissances antérieures des étudiants dont elle est nécessairement éloignée. Pour cette notion, il paraît donc difficile de trouver un problème initial pour lequel elle serait un outil de résolution optimal et à la suite duquel les étudiants parviendraient à écrire en autonomie la définition formalisée attendue puisque cette notion n'a pas ou peu été travaillée dans l'enseignement secondaire, du moins en France.

Pour ces raisons, ce type de notions est délicat à introduire et nous faisons l'hypothèse que l'enseignant joue un rôle important au moment de leur introduction, notamment pour amener les étudiants à donner du sens à la notion et à l'utiliser correctement. Des travaux antérieurs montrent que l'enseignant peut recourir à certains leviers tels que les commentaires méta (Dorier, 1997), des formalisations intermédiaires (Bridoux, 2011) ou encore des changements de cadres et de registres (Robert, 1983) pour favoriser la prise de sens et l'appropriation de certaines notions FUG (respectivement espace vectoriel, notions de topologie, limite d'une suite).

Dans cette contribution, nous nous focalisons sur les questions suivantes : qu'est-ce qui est explicité par l'enseignant lorsqu'il introduit la définition formalisée de limite ? En particulier, reformule-t-il la définition pour rester « proche » des connaissances des étudiants ? Donne-t-il des commentaires méta sur ce que la définition formelle traduit, la manière dont elle est construite ?

Pour mieux comprendre le rôle des échanges entre l'enseignant et les élèves dans la classe, il nous a semblé pertinent d'étudier un média, ici le manuel, où le professeur est absent. Dans cette situation, le savoir n'est pas présenté oralement et il n'y a pas non plus d'échanges verbaux comme dans un amphi entre l'enseignant et les étudiants. Le lecteur est seul face au livre. Se pose donc la question de la transformation des « connexions » réalisées entre le lecteur et le texte du savoir en connaissances. En ce sens, nous pensons pouvoir dégager de la lecture du manuel des occasions de proximités qui pourraient se créer avec le lecteur. Ces proximités, que nous qualifions de « potentielles » ou « tentées », pourraient être développées par l'enseignant, c'est un élément à étudier dans les cours filmés en amphi. L'étude de manuels que nous poursuivons encore actuellement, nous sert également de référence mathématique et curriculaire pour mieux apprécier ce qui est présenté par l'enseignant dans un cours.

## OUTILS THEORIQUES

Un moment de cours est l'occasion de présenter aux étudiants des concepts (du moins perçus comme tels par l'enseignant) avec des mots, des formules,... avec un certain environnement éventuellement (histoire, commentaires, questions,...) mais en sachant que ce ne sont pas encore des concepts pour les étudiants. L'enjeu de ce type de moment est que cela participe aux acquisitions visées. Nous faisons l'hypothèse qu'une des manières développées par les enseignants pour y arriver est de rester aussi « proche » que possible des connaissances des étudiants, notamment grâce à l'activation de connexions entre ces mots, ces formules,... et ce qu'ils savent déjà. On reconnaît ici une « opérationnalisation » de la notion de ZPD chez Vygostky. Pour caractériser cette proximité, Robert et Vandebrouck (2014) introduisent la notion de *proximité-en-acte* pour qualifier ce qui, dans les discours ou dans les décisions des enseignants pendant les déroulements des séances, peut être interprété par les chercheurs comme une tentative de rapprochement avec les élèves. Les proximités-en-acte traduisent ainsi une activité de l'enseignant (discursive ou autre) visant à provoquer et/ou à exploiter une proximité avec les réflexions ou les activités ou les connaissances des élèves. Cette activité de l'enseignant peut plus ou moins être consciente et voulue. Ces proximités peuvent être d'ordre cognitif ou non, et concernent ou non tous les élèves. Dans ce travail, notre attention se porte sur les proximités discursives de nature cognitive.

Nous suggérons qu'il y a, dans les cours, plusieurs grands types de ces proximités-en-acte particulières. Elles se déclinent en relation avec les contenus précis. Elles sont soit le fait de l'enseignant, soit se jouent dans des échanges questions/réponses avec les étudiants. Nous pensons qu'elles peuvent avoir des finalités différentes, mais qu'elles n'atteignent leurs objectifs qu'à certaines conditions, liées à la nature du savoir non contextualisé en jeu, c'est-à-dire le savoir général à retenir et à réutiliser, et notamment à son degré de généralité, et aussi à la nature des exemples et activités proposés ainsi qu'au travail que les élèves ont eu ou ont encore à faire avec ces contenus. C'est leur place par rapport aux moments d'exposition des connaissances et les liens qu'elles supposent entre contextualisé et hors-contexte qui déterminent ces types. Soulignons qu'un passage du cours ou une activité introductive ou illustrative peut activer plusieurs types de proximités successivement.

Les *proximités inductives ou ascendantes* se placent entre ce qu'ont déjà pu faire les étudiants et du nouveau (mots, définitions, propriétés) – il y a généralisation, décontextualisation ou énoncés hors-contexte, soit d'un caractère outil qui donne naissance à un « nouvel » objet ou à un « nouvel » outil, soit directement d'un nouvel objet, définition ou propriété. Ce type de proximité peut par exemple se retrouver dans beaucoup d'ingénieries ou de problèmes développant une dialectique outil-objet (Brousseau, 1998 ; Douady 1987 ; Butlen & Pézard 2003) où en s'appuyant sur le travail des élèves, l'enseignant dégage le savoir en le « sortant » du contexte dans lequel les élèves ont travaillé.

Les *proximités déductives ou descendantes* se placent entre ce qui a été exposé et des exemples ou exercices à faire ensuite avec ou par les élèves (contextualisation, voire re-contextualisation différente des anciennes), par exemple des illustrations faites par l'enseignant. Les élèves peuvent être associés plus ou moins directement. L'enjeu est d'explicitier ce qui est à contextualiser, la manière d'inscrire le cas particulier traité dans l'invariant général, de substituer les données aux bonnes variables (à repérer).

Les *proximités horizontales* ne font pas changer de niveau de discours (restant sur du contextualisé ou du général). Cela peut porter sur le cours en train de se faire, y compris sur les expressions formelles (demandes de compléments, de réponses) ou sur la structuration du cours (« on en est où ? ») ou même sur des discours plus méta, mises en évidence de relations, d'analogies, statuts des éléments en jeu, voire questions sur le savoir concerné, selon ce qui est en jeu. C'est l'enseignant qui les gère, même s'il peut poser des questions.

Des exemples illustrant la présence ou non de ces proximités sont maintenant donnés pour chaque type de média (un manuel et un cours en amphi).

## **PRESENTATION DES ANALYSES**

### **Méthodologie**

Comme nous l'avons précédemment suggéré, l'efficacité des cours dépendrait notamment des occasions et de la qualité de l'activation de ces proximités-en-acte, et donc du discours de l'enseignant, que ce soit par des reprises, des questions, des exemples, des explications, des corrections,... avec des diversités selon les étudiants. Nous faisons donc le choix, ici, d'étudier dans le manuel la présence de proximités « potentielles » de manière à anticiper ce qui, dans le discours de l'enseignant, pourrait donner lieu à des proximités « tentées » par celui-ci. Ces occasions de proximités dépendent aussi des notions étudiées. Compte tenu des spécificités de la notion de limite (de suite et de fonction) décrites précédemment, notamment la distance importante entre les connaissances anciennes des étudiants et la nouvelle notion à introduire ainsi que la structure logique complexe de la définition, nous nous intéressons à la présence ou non de reformulations de la définition avec d'autres mots pour rester « proche » de ce que peuvent entendre les étudiants, associé notamment à la structure logique globale de la (nouvelle) définition. Cela s'appuie sur la prise en compte des connaissances anciennes (ou actuelles) des étudiants. Les premiers exemples proposés par l'enseignant, puis les premiers résultats et leurs démonstrations ont eux aussi été étudiés (Bridoux et al., 2015).

### **Étude d'un manuel et occasions de proximités**

Nous regardons ici le manuel *Mathématiques Tout-en-Un* (Gautier et al., 2007). Ce manuel couvre le programme de mathématiques de la première année des classes préparatoires économiques et commerciales et concerne principalement la filière scientifique. La section qui traite des suites convergentes démarre par la définition suivante et fixe ensuite les notations (p.322):

Une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite convergente s'il existe un réel  $l$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

On dit que  $l$  est la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .

On note  $l = \lim u$  ou  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

La caractérisation choisie pour définir la notion de convergence vers un réel n'utilise que des symboles mathématiques. Elle n'est accompagnée d'aucun commentaire explicatif que ce soit sur les quantifications, sur la présence de la valeur absolue ou encore sur le fait que cette caractérisation traduise effectivement l'idée de « converger vers ». Aucun dessin ou graphique n'est présenté dans cette partie. Telle qu'elle est présentée, il nous semble difficile d'établir ici un rapprochement avec les connaissances « déjà-là » d'un étudiant en première année universitaire qui tenterait de s'approprier seul la notion en lisant ce manuel, d'autant que le choix de définition suggéré dans les programmes du lycée repose sur une caractérisation en termes d'intervalles centrés en la limite contenant tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Celui-ci aurait en effet complètement à sa charge de donner du sens au formalisme utilisé dans la définition.

Deux remarques suivent la définition dans le manuel. La première consiste justement à reformuler la définition précédente en termes d'intervalles (comme le préconisent les programmes du lycée) :

*La définition signifie que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ou encore tous les termes de la suite sauf un nombre fini, sont dans l'intervalle  $[l - \varepsilon; l + \varepsilon]$ .*

Cette reformulation est une occasion de donner un certain sens à la définition précédente en lien avec les connaissances antérieures des étudiants. Cependant, aucune explication n'est donnée sur le passage des symboles présents dans la définition aux expressions utilisées ici, comme « tous les termes de la suite à partir d'un certain rang », ni sur le passage de l'inégalité à la notion d'intervalle. De nouveau, il n'y a ici aucune trace d'une tentative de connexion avec les connaissances du lecteur.

La deuxième remarque concerne le fait que la caractérisation en termes d'intervalles est aussi vérifiée pour des intervalles ouverts, avec une tentative de justification :

*Comme tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient un intervalle de la forme  $[l - \varepsilon; l + \varepsilon]$ , la propriété est vérifiée pour tout intervalle ouvert contenant  $l$  : la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  si, pour tout intervalle ouvert  $I$  contenant  $l$  tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont dans  $I$ .*

Remarquons que la justification ne porte que sur la transformation des intervalles, la question de savoir si le même entier  $n_0$  convient selon qu'on travaille avec un intervalle ouvert ou un intervalle fermé n'est pas abordée. Elle est de nouveau laissée à la charge du lecteur.

Dans ce manuel, la notion de convergence d'une suite numérique est présentée sans motivation, la nécessité de la nouvelle définition n'apparaît pas. Dans un cours magistral, l'enseignant pourrait commenter, même brièvement, l'introduction d'une nouvelle notion, même si la motivation est justifiée seulement ici par l'évocation du savoir mathématique. En anticipant sur ce qui va suivre, on peut déjà se dire que dans un amphi, en cours magistral, l'enseignant qui introduirait cette définition l'exprimerait sans doute à voix haute tout en l'écrivant. L'étudiant aurait alors au moins l'occasion d'entendre comment le professeur prononce cette phrase mathématique uniquement constituée de symboles, en ajoutant ne serait-ce que des petits mots. Dans un cours effectif, le passage de la définition à la caractérisation en termes d'intervalles pourrait aussi être accompagné de commentaires explicatifs de l'enseignant, notamment de rappels sur la manipulation d'inégalités avec valeur absolue et serait ainsi l'occasion d'une proximité horizontale. Ainsi, ce moment de première rencontre avec la définition formelle de convergence offre sans doute des occasions au moins de proximités horizontales à travers les reformulations qui sont présentées, les symboles utilisés et les notations introduites alors que le manuel ne donne aucun commentaire explicatif sur ces différents passages.

### **Étude d'un cours magistral**

Pour mesurer l'importance du rôle de l'enseignant lors de l'introduction de la notion de limite, nous étudions maintenant une vidéo de cours magistral en première année d'université. Le cours étudié est une séance de 1h30 donnée au second semestre devant 200 étudiants pour lesquels il constitue la première rencontre avec la définition formalisée de la notion de limite de fonction.

Notre objectif est toujours de mettre en valeur les occasions que l'enseignant a ou pas de créer des proximités avec les connaissances des étudiants au cours des éventuelles reformulations qu'il fait de la définition de limite. Pour cela nous analysons tout ce qui, dans l'activité discursive de l'enseignant – orale ou écrite –, peut être vu comme un rapprochement potentiel avec les connaissances des étudiants : en particulier, nous prenons en compte le fait que dans un cours magistral le texte du savoir est accompagné du discours oral de l'enseignant, de ses gestes et d'interactions éventuelles avec certains étudiants qui peuvent lui permettre de donner une certaine cohérence au savoir et de tisser des liens.

Pour analyser ce moment d'enseignement, nous avons procédé à la transcription intégrale des écrits au tableau et du discours de l'enseignant puis nous les avons mis en regard avant de procéder à un découpage du déroulement en phases qui suit celui effectué par l'enseignant sur le plan de son cours. Nous insistons ici seulement sur les phases (1, 3, 6) qui ont trait à la définition de limite de fonction en un point.

Lors de la phase 1, l'enseignant tente de faire une introduction intuitive. Après avoir demandé et obtenu d'un étudiant visiblement avancé la définition de limite en un point, il la reformule de deux façons. Dans un premier temps, il dit « *OK,  $f(x)$  doit se rapprocher autant que l'on veut de  $l$  mais quand  $x$  se rapproche de  $x_0$*  ». Dans un

second temps, il traduit sur un exemple graphique l'expression « se rapprocher de » par des flèches et des gestes avant d'aboutir à une seconde reformulation : «  $f(x)$  est aussi proche que l'on veut de  $l$  si  $x$  est suffisamment proche de  $x_0$  ». Cette phase témoigne de la volonté de l'enseignant de tenter de partir des représentations intuitives des étudiants pour en arriver à deux reformulations contenant déjà en germe certains éléments logiques et formels de la définition : ce faisant, il tente de créer a priori un début de proximité horizontale avec la définition de limite. Cependant, cet avis est à tempérer puisque la seconde reformulation reste encore éloignée de la définition formelle quantifiée : non prise en compte de la nature des quantificateurs, inversion possible de leur ordre. En outre, on peut se demander si cette tentative relaie des besoins réels des étudiants.

Lors des phases 3 et 6, l'enseignant en vient aux premières définitions formelles de la notion de limite en un point. Lors de la phase 3, il tente d'écrire cette définition progressivement en respectant une chronologie qui part de la seconde reformulation obtenue lors de la phase 1. Lors de la phase 6, l'enseignant écrit au tableau la définition formelle et une troisième reformulation :

Définition : soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction définie sur un voisinage de  $x_0$ .  $f$  a pour limite  $l \in \mathbb{R}$  en  $x_0$  si et seulement si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$  tel que  $\forall x \in Df, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ . Autrement dit, aussi petit que soit  $\varepsilon$  on peut trouver un intervalle suffisamment petit autour de  $x_0$  sur lequel la distance de  $f(x)$  à  $l$  est inférieure à  $\varepsilon$ .

Il fait ensuite oralement le parallèle entre les éléments de la définition formelle et cette reformulation : « D'accord, le « quel que soit » c'est « aussi petit que soit  $\varepsilon$  », «  $\exists \alpha > 0$  tel que  $\forall x \in Df, |x - x_0| < \alpha$  » ça c'est un intervalle en fait donc il existe un intervalle suffisamment petit autour de  $x_0$  sur lequel la distance de  $f(x)$  à  $l$  est inférieure à  $\varepsilon$  ». Il interroge ensuite les étudiants pour savoir s'il est clair que :  $|x - x_0| < \alpha \Leftrightarrow x \in ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ .

Pendant ces deux phases, le travail de l'enseignant témoigne d'une volonté d'introduire la définition de limite en un point en travaillant à la fois sur son formalisme et sa structure logique par le biais d'un réseau de proximités horizontales appuyées sur de nombreuses reformulations de certaines parties de la définition [3]: en mots (oral et écrit), avec un graphique (oral et écrit), en termes de distance (oral), d'inégalités strictes impliquant des valeurs absolues (écrit), en termes d'intervalles et de voisinages [4] (oral et écrit). En guise de bilan, nous pouvons dire au travers de l'étude des premiers moments en lien avec la définition de limite qu'il y a des différences sensibles entre ce cours magistral et le manuel. Si le caractère FUG de la notion de limite semble interdire à l'enseignant des liens effectifs avec les connaissances antérieures des étudiants lors de l'introduction à la notion de limite de fonction, de nombreux indicateurs au sein de son activité discursive montrent d'abord des essais de proximités horizontales avec ces connaissances. Les proximités potentielles pointées dans la section consacrée au manuel sont effectivement présentes dans ce cours magistral et se trouvent même enrichies. Pour cela,



l'enseignant se base sur un formalisme progressif des diverses reformulations utilisées (mots, graphique, valeur absolue, distance, voisinage) qu'il commente abondamment. Cependant ces tentatives de rapprochement sont à relativiser en ce qu'elles sont pour la plupart orales et non écrites et que la distance dit/écrit chez cet enseignant est grande : on peut donc se demander ce que les étudiants en retiennent. D'autre part, même si l'enseignant prend en charge une part de la structure logique de la définition, il laisse de côté des difficultés au sujet de la nature et de l'ordre d'apparition des quantificateurs, voire même l'inversion partielle de l'ordre suivi dans la définition et l'imbrication des déterminants par rapport à ceux suivis dans l'expression antérieure familière «  $f$  se rapproche de  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  ». Par exemple, l'introduction de «  $\exists \alpha > 0$  » dans cette phrase logique semble retardée puis forcée par l'enseignant, étant donné qu'aucun élément de ses différentes reformulations ne permet de la motiver réellement. Pour mesurer la portée de son travail sur la définition et sur les proximités repérées, sans doute faudra-t-il attendre les cours ou travaux dirigés suivants.

Dans ce cours, nous n'avons pas repéré de proximités ascendantes : selon nous, cette absence viendrait de ce que les notions introduites ont été identifiées comme FUG. En revanche, notre étude (Bridoux et al., 2015) a montré des essais de proximités descendantes avec les connaissances des étudiants lors d'autres phases. Dans la phase 12 pour laquelle il s'agit de montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , l'enseignant met en valeur la logique locale et le formalisme de la définition [5] qu'il reformule en utilisant des connaissances antérieures des étudiants sur les valeurs absolues et la fonction inverse. Ce faisant, il tente de créer une proximité descendante vis-à-vis de la définition formelle sous-jacente. En fin de démonstration, il revient explicitement mais à nouveau juste oralement sur une méthode générale et féconde pour prouver ce type de résultat : en quelque sorte, il tente de rendre la définition « procédurale », il faut se donner un epsilon et réaliser quelque chose ensuite qui est de l'ordre de la recherche d'une condition suffisante d'une forme souhaitée. En d'autres termes, il a introduit auparavant la définition formelle de limite par le biais de différentes reformulations (proximités horizontales) qu'il utilise et la preuve d'un tel résultat demande une démonstration formelle qu'il tente de rapprocher (proximité descendante) d'une utilisation procédurale de la définition au sens où les étudiants peuvent traduire ce qu'il faut réaliser en termes de procédures associées à des connaissances qu'ils sont supposés maîtriser.

## CONCLUSION

Une nouvelle notion, et particulièrement lorsqu'elle s'accompagne d'un nouveau formalisme comme c'est le cas de la notion de limite, embarque avec elle un certain nombre de connaissances, y compris anciennes, et de nouveautés, notamment logiques, – invisibles directement à partir des seuls mots ou des premières formules. Ainsi, l'étude des proximités discursives « potentielles » ou « tentées » permet selon

nous de repérer comment l'enseignant s'appuie, dans les « moments de cours », sur les connaissances antérieures des étudiants et d'éclairer ce qui est visé.

Nous avons montré que, globalement, le manuel étudié ne donne même pas d'occasion de proximités horizontales au moment de l'introduction de la définition de limite alors que le cours en amphi est sans doute un lieu où il est davantage possible de développer ces proximités. Dans le cours étudié, l'enseignant tente effectivement d'établir des proximités soit horizontales en se basant sur un formalisme progressif des diverses reformulations utilisées (mots, graphique, distances et valeurs absolues, voisinages...), soit descendantes, notamment lorsqu'il traite les premiers exemples d'utilisation des définitions formelles, en mettant en valeur certaines connaissances en logique (quantificateurs, méthodes de raisonnement, condition suffisante...) : en outre, ces reformulations et mises en valeur sont en général accompagnées de commentaires explicatifs de l'enseignant, contrairement au manuel où certains passages étaient laissés à la charge du lecteur.

Cette étude a évidemment ses limites. Il manque à la fois une étude de davantage de cours portant sur les suites et les fonctions, et une mise en relation directe avec des effets sur les élèves – ou au moins des hypothèses à ce sujet. Des recherches plus précises seraient à mener, en faisant varier les contenus étudiés, les élèves, les enseignants, en interrogeant les élèves à la sortie d'un cours, en comparant des productions d'élèves et leur cours...

## NOTES

1. L'amphi est la salle où se donne le cours magistral.
2. La distinction entre connaissances et savoirs est peu présente ici: les savoirs sont associés à ce qui est adopté par les mathématiciens alors que les connaissances relèvent plutôt de ce que les étudiants en retiennent et utilisent.
3. Voir Bridoux et al. (2015) pour plus de précisions.
4. Les voisinages (pointés) ont été définis par l'enseignant lors des phases 4 et 5 du déroulement global.
5. La définition de limite finie en  $\pm\infty$  a été donnée par l'enseignant lors de la phase précédente et reformulée de manière similaire à celle de limite finie en un réel.

## REFERENCES

- Bridoux S. (2011), *Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas*. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7).
- Bridoux S., Chappet-Pariès M., Grenier-Boley N., Hache C. & Robert A. (avec la collaboration de Lévi M.C. et Pilorge F.) (2015), Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques (secondaire et début d'université). *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz*, n°14, Juillet 2015.
- Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

- Butlen D. & Pézard M. (2003), Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **23.1**, 41-78.
- Dorier J.L. (Ed.) (1997), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée sauvage.
- Douady R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7/2**, 5-31.
- Gautier C., Warusfel A., Caminade B., Fontaine H. & Nicolas S. (2007), *Mathématiques Tout-en-un, ECS 1<sup>ère</sup> année*, Éditions Dunod.
- Oktaç A. & Vivier, L. Conversion, change, transition... in research about analysis, Book en hommage à Michèle Artigue, Springer. (to appear)
- Robert A. (1983), L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP* **340**, 431-449.
- Robert A. (1998), Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **18/2**, 139-190.
- Robert A. & Robinet J. (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **16/2**, 145-175.
- Robert A. & Vandebrouck F. (2014), Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **34 2-3**, 239-285.